Conceptos y asociaciones de duration en la valuación de bonos

Tapia, Gustavo N.

1) Tipos de Duration

A) Duration de Macaulay

El concepto de duration fue desarrollado por Frederick Macaulay en 1938 y hace referencia al vencimiento promedio de la corriente de flujos de caja de un título de renta fija. Macaulay pensó que el concepto de duration serviría para describir el promedio de vida de un bono considerando todos los flujos de fondos y el valor tiempo del dinero.

La duration se obtiene calculando la media ponderada de los vencimientos de cada flujo implicado en el mismo. Las ponderaciones para cada período de tiempo t son iguales al valor actual de los flujos de caja en cada período de tiempo (intereses-cupones o su principal, multiplicados por sus factores de descuento respectivos) divididos por el valor actual del bono.

En forma discreta, la expresión matemática de la Duration es:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} (t \times Qt) / (1+r)^t}{\sum_{t=1}^{N} Qt / (1+r)^t}$$

O bien:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{N} (t \times Qt) / (1+r)^t}{P_o}$$

En esta expresión Po representa el precio de mercado del bono en la actualidad, Qt es el flujo de caja del período t (cupón + principal), r es la tasa de rendimiento hasta el vencimiento, n es el número de años hasta el vencimiento.

Ejemplo

Bono de 10000 $ que paga 12% interés anual

Rendimiento anual estimado= 14.50%

Período	Flujo de Caja	Factor Descuento	Valor Actual	Valor Actual x n
1	1,200.00	0.873	1,048.03	1,048.03
2	1,200.00	0.763	915.31	1,830.63
3	1,200.00	0.666	799.40	2,398.20
4	1,200.00	0.582	698.17	2,792.67
5	11,200.00	0.508	5,691.03	28,455.13
		Po=	**9,151.94**	*36,524.67*

Duration= 36,524.67/ 9,151.94

D = 3,991

En este caso se puede apreciar que hay una diferencia de 1,01 años con relación a la vida de la emisión, que se debe a que parte de los flujos de tesorería se reciben antes del vencimiento del bono.

B) Fórmula simplificada de la duration de Macaulay

En esta expresión, r es el rendimiento de la emisión, c es el tipo de interés del cupón y n el número de períodos que quedan hasta el vencimiento. Es necesario poner todos estos valores en términos anuales o semestrales según sea que la emisión pague cupones en forma anual o semestral:

$$D = \frac{1+r}{r} - \frac{n * (\%c-r) + (1+r)}{\%c * (1+r)^n - (\%c-r)}$$

r =	0.145
%c=	0.12
p=	5

$$D = \frac{1+0.145}{0.145} \quad \text{menos} \quad \frac{5*(0.12-0.145)+(1+0.145)}{0.12*(1+0.145)^5 - (0.12-0.145)}$$

C) Duration modificada

Para **conectar los conceptos de volatilidad y duración** debemos manejar el concepto de **duration modificada.**

La **volatilidad** de los bonos **es la sensibilidad de su precio de mercado con relación a los cambios que se produzcan en el tipo de interés.**

Podríamos estudiar la variación que se produce en el precio del bono con respecto a un incremento de un 1% sobre el rendimiento hasta el vencimiento del mismo.

Expresaremos la duration modificada D* como:

D* = D / (1+ r / m)

en la cual D es la duration de Macaulay, r el rendimiento anual hasta el vencimiento y m el número de veces que se paga el cupón por año (vg m=2 es semestral; m=4 es trimestral).

La duration de Macaulay requiere de una modificación en función de lograr una mayor precisión al considerarla como una medida de riesgo. La duration modificada se puede utilizar como una medida de sensibilidad de la cotización del bono ante cambios en la tasa de interés:

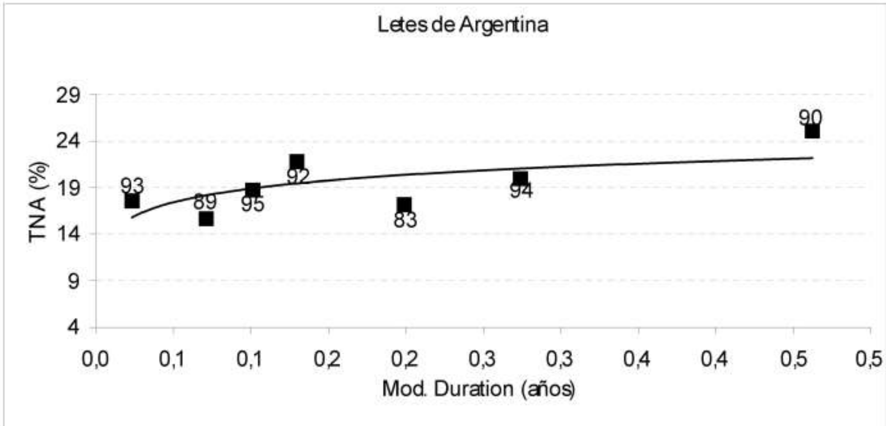
Cambio % Precios del bono = - Duration Modificada x Cambio en tasa de Interés (puntos básicos)/100

Cambio Precio Bono = - D* x BP/100

Entonces frente a cambios en la tasa de interés conociendo la duration podemos explicar cambios en los precios de los bonos. Los precios de los bonos están inversamente relacionados a los rendimientos de los mismos. Por eso la duration modificada está precedida por un signo menos (relación inversa).

La duration modificada en la fórmula inmediata precedente actúa como un multiplicador: cuanto más alta sea la D* mayor será el impacto en el precio ante un cambio en la tasa de interés.

Por último, grandes cambios en la tasa de retorno conllevan importantes cambios en el precio de un bono. La sensibilidad del precio de un bono es un indicador de riesgo. La duration modificada es una medida de ese riesgo.

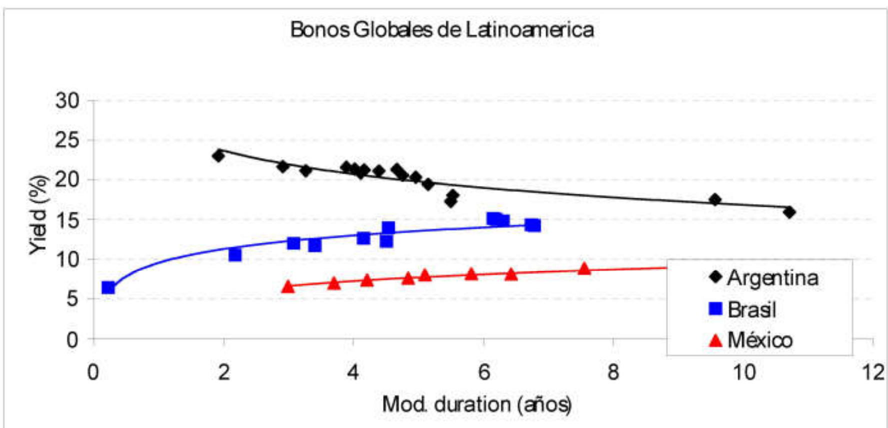


1) El concepto de duration incorpora el plazo al vencimiento y el efecto cupón en una medida de sensibilidad del precio a la tasa de interés. Esto permite comparar diferentes bonos entre sí.

2) Se puede comparar la duration de un portafolio por medio de un promedio ponderado de las durations de sus activos. Los factores de ponderación vienen dados por los valores de mercado de los activos con respecto al valor total de mercado del portafolio completo.

3) Para un bono cupón cero, por definición, la duration coincide con el plazo al vencimiento.

4) Si deseamos calcular la duration modificada en términos anuales cuando calculamos la duration de Macaulay debemos tener la precaución de dividirla por el número de subperíodos que hay en el año.



2) Relaciones entre el precio de un bono y su rendimiento, utilizando la Duration modificada

CASO

Bono a 20 años, cupón 5%, tasa de rendimiento (yield to maturity) del 9% y precio del 63,1968. La duration de Macaulay es de 10.87. Pago del cupón semestral.

1) Calculamos la duration modificada.

10.87 / (1+0.09/2) =**10.4**

2) Variación del rendimiento del 0.1%

Variaciones pequeñas

Si TIR aumenta de 9% a 9.10% = DP/P = -10.40 * (0.001) *100

= -1.04%

= vs Real -1.03%

Sí TIR baja de 9% a 8.90% = DP /P= -10.40 * (-0.001) *100

= 1.04%

= vs Real 1.03%

3) Variaciones del Rendimiento del 2%

Variaciones más grandes

Si TIR aumenta de 9% a 11% = DP /P= -10.40* (0.02)*100

= -20.80%

= vs Real -17.94%

Si TIR baja de 9% a 7% = DP /P= -10.40*(-0.02)*100

= 20.80%

= vs Real 24.44%

Concluimos en que para cambios porcentuales "pequeños" la duration es una buena aproximación de la variación del precio. Estima un cambio porcentual simétrico en el precio del bono, que no es una propiedad de la relación que existe entre el precio y el rendimiento.

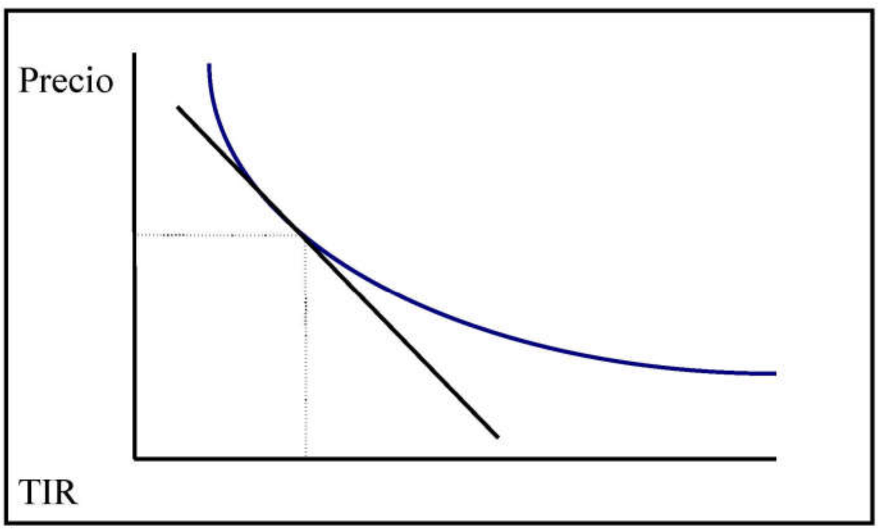
Ante una baja en el rendimiento la duration subestima la variación del precio, y ante un aumento en el rendimiento sobrestima la variación del precio. Para evitar estos errores de estimación usamos la c**onvexidad.**

Utilización de la duration modificada

La pendiente de la curva de precio-rendimiento de un bono en un punto (representada gráficamente por la tangente a la curva en ese punto), se mide por la derivada del precio ante cambios en la Tir, dP/dTIR, o sea: —duration modificada*P.

En el siguiente gráfico podemos observar que este cálculo es un buen indicador de la tasa de cambio del precio del bono sólo en el caso de un pequeño cambio en el rendimiento. Para cambios mayores, la subestimación del precio que surge de este cálculo se torna más crucial.

Esto es aún más grave cuanto mayor sea la convexidad de la curva.



Cuanto mayor sea la duration modificada, mayor será el impacto en el precio ante un cambio en la TIR requerida. Además, para un bono con una duration determinada, cuanto mayor sea el cambio en la TIR, mayor será el cambio en el precio.

Ejemplo: El bono XYZ tenía al día 11/06/09 una TIR del 13.56%. Dado que la duration modificada es de 2.46 años, resulta que ante una suba de 50 puntos básicos en la TIR (de 13.56% a 14.06%), el precio bajará un 1.23%.

Variación % Precio = (-DM) * (Var. TIR en bps. / 100) = (-2.46) * (50 / 100) = —1.23%

Propiedades de la duration y duration modificada

Propiedad 1: A mayor interés pagado por el bono, menor duration.

Propiedad 2: Dados los intereses y la TIR, la duration será mayor cuanto más larga sea la vida del bono.

Propiedad 3: Dados los demás factores, a medida que aumenta la TIR, se reduce la duration y, por ende, la volatilidad del precio.

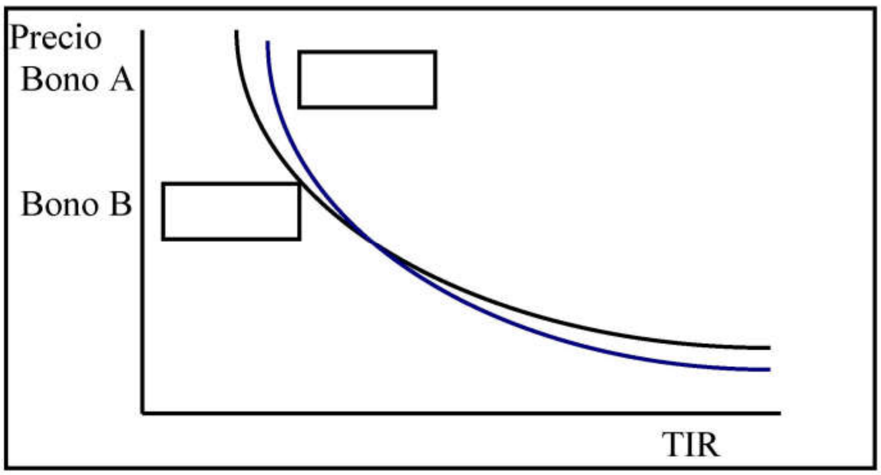
Un bono es un paquete de instrumentos de zero coupon. Un título debería ser visto como un conjunto de flujos de fondos, donde cada uno sería como un instrumento de zero coupon, y con fecha de vencimiento en la fecha en que sería pagado y el valor del principal igual al flujo.

Si un bono es visto como un instrumento de zero coupon ¿cómo debería valuarse? El valor del bono es el valor total de todos los instrumentos de cupón cero. Y el valor de cada uno es determinado descontando el principal a una tasa que es única para ese instrumento. Pero ¿cuál sería el rendimiento que debería usarse para valuar cada uno de ellos? El rendimiento mínimo es la tasa que el tesoro debería pagar si emitiera un bono zero coupon con similar vencimiento al flujo de fondos analizado.

3) Convexidad

Los cálculos basados en la duration son aproximaciones que se obtienen ante pequeños cambios en la TIR, pero no capturan la convexidad de la relación precio-TIR si los cambios son de mayor magnitud. Es el error que se incurre al estimar el precio basándose únicamente en la duration. Es decir que ante una baja en la TIR, la duration subestima el cambio en el precio y ante un aumento lo sobrestima.

El término convexidad surge del hecho que la curva precio-rendimiento es convexa al origen del gráfico.

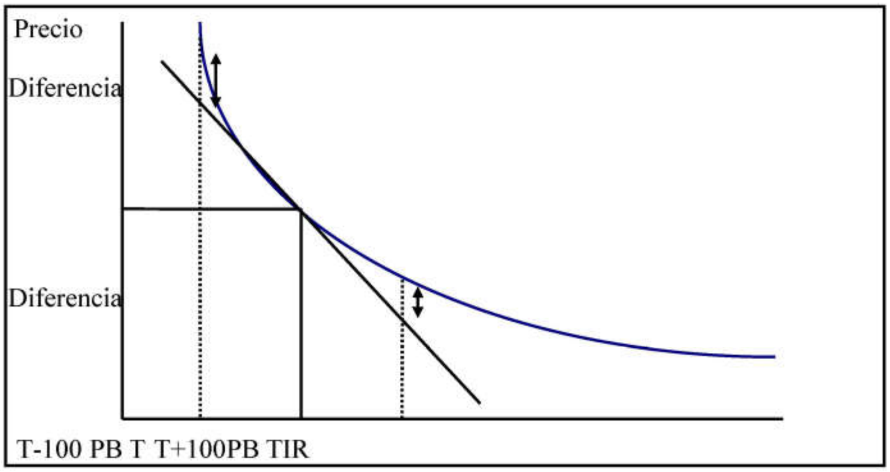


La convexidad se mide por la brecha o diferencia existente entre la línea tangente de la curva de precio-rendimiento y la curva misma en un punto determinado. Podemos definir entonces a la convexity como la diferencia entre el precio real (actual) y el precio del bono estimado por la línea de duration modificada. Matemáticamente, la duration modificada es la primera derivada de la relación precio-rendimiento. La convexidad es la segunda derivada de esta relación.

Es una expresión de la tasa de cambio de la duration modificada ante variaciones en el rendimiento. En términos más simples, la duration modificada es la pendiente de la curva precio-rendimiento en un determinado punto a lo largo de la curva, mientras que la convexidad es la brecha existente entre la línea tangente de la duration modificada y la curva de precio — rendimiento.

En términos porcentuales, la convexidad es el cambio incremental en el precio, no atribuible a la duration modificada.

Matemáticamente, (-Duration Modificada*P) es la primera derivada de la relación precio-rendimiento, y la convexity es la derivada de esta misma relación.



La convexity es entonces el cambio incremental en el precio real del bono ante un cambio en su TIR no atribuible a la duration modificada:

Convexity (en $)= Precio Real del Bono— Precio estimado del Bono

Convexity (en %)= % de Cambio Real — % de Cambio Estimado en el Precio del Bono en el Precio del Bono

Volviendo al ejemplo del bono, podemos calcular su convexidad partiendo de una TIR del 10.00%:

TIR (1)	Precio (2)	Var%Precio (3)	(DM)*VarTIR (4)	Convexity (5)=(3)-(4)
10,00%	89,875	0,00%	0,00%	0,00%
10,01%	89,850	-0,03%	-0,03%	0,00%
10,10%	89,600	-0,31%	-0,32%	0,01%
11,00%	87,180	-3,00%	-3,48%	0,48%

La importancia de la convexity se hace más evidente cuanto más grandes son las diferencias respecto del precio inicial.

Factor de convexidad

Para realizar comparaciones de la convexidad entre distintos bonos con misma duration, es necesario disponer de una expresión estandarizada de la misma. Al medirse en las mismas unidades que la duration modificada, ambas pueden sumarse para obtener una medida superior de estimación de la sensibilidad del precio de un bono. Este es el concepto subyacente detrás de un factor de convexity.

$$\text{Factor de Convexity} = \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dTIR^2}\frac{1}{P}$$

donde:

$$\frac{d^2P}{dTIR^2} = \text{derivada segunda del precio ante cambios en la TIR.}$$

Cálculo del "Factor de Convexity"

Calculando la segunda derivada del precio con respecto a la TIR, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d^2 P}{dTIR^2} = \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)C_t}{(1+TIR)^{t+2}}$$

El factor de convexity se calcula entonces según la siguiente fórmula:

$$\text{Factor de Convexity} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)C_t}{(1+TIR)^{t+2}}\frac{1}{P}$$

Relaciones de la convexidad

El factor de convexity es positivo en el caso de funciones convexas, como son las que surgen de los bonos. Cuando aumenta la TIR de un bono, cae su convexidad y viceversa.

La convexidad está positivamente relacionada a la duration del bono subyacente. Los bonos con altas durations tienen grandes convexities, mayores que los títulos de corta duration.

La convexidad es una función creciente de la duration y también está positivamente relacionada a la volatilidad del rendimiento del mercado, de tal manera que la alta volatilidad en las tasas de rendimiento genera grandes efectos convexity.

Ejemplo de convexidad, duration modificada y duration (FRB)

Fecha de valuación	16-Ago-01
Fecha de Inicio del Cupón	**30-Mar-01**
Precio clean	47,60
Precio dirty	**48,97**
Cupón Corriente	5,5625%
Cupón corrido $ p/c 100	1,3746
Current yield	**7,4790%**
Swap LIBOR (pagos semianual)	**4,214**
Pago Int.	180

Paridad	74,9138	reset date	30-Sep-01
V.Técnico	65,3746		

TIR Anual	**25,641%**
TNA	**24,16%**
Average Life	1,87
Duration	1,51
Modified Duration	1,34
convexidad	1,60

FLUJO DE FONDOS

Fecha de vencimiento	LIBOR proyectada	Renta -en u$s-	Amortiz. -en u$s-	Cupón	dias h/cupon t
16-Ago-01				-48,97	
31-Mar-00	6,8125		8,00		
29-Sep-00	7,3750	2,98	8,00		
30-Mar-01	7,6250	2,78	8,00		
28-Sep-01	5,5625	1,80	8,00	9,800	43
28-Mar-02	5,0265	1,42	8,00	9,415	224
30-Sep-02	5,0265	1,25	8,00	9,247	410
31-Mar-03	5,0265	1,02	8,00	9,016	592
30-Sep-03	5,0265	0,82	8,00	8,818	775
31-Mar-04	5,0265	0,61	8,00	8,613	958
30-Sep-04	5,0265	0,41	8,00	8,409	1141
31-Mar-05	5,0265	0,20	8,00	8,203	1323
					5.466,00

PV	t*PV	Sum Amort	dias * w.a.l.	t*(t+1) (en años)	PV*(t*(t+1))	Capital Residual
						88,00
						80,00
						72,00
9,540	410,21	8,00	344,00	0,13	1,26	64,00
8,185	1.833,34	8,00	1792,00	0,99	8,11	56,00
7,155	2.933,68	8,00	3280,00	2,39	17,07	48,00
6,227	3.686,18	8,00	4736,00	4,25	26,48	40,00
5,431	4.208,93	8,00	6200,00	6,63	36,02	32,00
4,731	4.532,61	8,00	7664,00	9,51	45,01	24,00
4,120	4.700,42	8,00	9128,00	12,90	53,13	16,00
3,587	4.744,98	8,00	10584,00	16,76	60,12	8,00
48,97	27.050,35	64,00	43.728,00	53,57	247,19	528,00

Si la tir aumenta 200 puntos basicos

Variacion por efecto duration=	-2,68%
Variacion por convexity=	0,03%
Variacion del precio en %=	-2,65%

Duration + Convexity

Incorporando la convexity en el cálculo de las variaciones de precio ante cambios en la TIR es posible establecer una mejor estimación del comportamiento actual del precio de un bono, que la que surge de considerar sólo la duration.

Cambio % del precio = —DM* D TIR + Factor de Convexity * (D TIR)2

Si comparamos el cálculo de la variación en el precio a partir de la duration modificada (DM) y factor de convexity (FC) con el resultado que surgiría de un tabla de sensibilidades (REAL), surge que dicho cálculo resulta ser una buena aproximación a la variación real del precio; y que el factor de convexity será más o menos importante en el cálculo según el grado de convexidad que presente el título.

Podemos entonces afirmar que la convexidad siempre agrega un factor positivo a la ecuación del cambio del precio. Es decir que la convexity es un atributo positivo para un bono. Evidentemente, este factor afectará el precio de cada bono, en mayor medida cuando se esperan grandes cambios en las TIR de mercado.

Estamos en condiciones de realizar nuestros cálculos de una manera más precisa ya que al incorporar la convexidad tendremos en cuenta el "cambio total". Si deseamos calcular el cambio porcentual del precio ante cambios en la TIR, deberemos utilizar la siguiente expresión:

dp = - Duration Modificada * dy * 100 + 0,5 * Convexidad * dy

Bonos a tasa flotante y duration

El caso de bonos a tasa flotante difiere substancialmente de los bonos a tasa fija, ya que las variaciones de la tasa de interés no solo afectan a la tasa de descuento, sino también al flujo de fondos, generados por la variabilidad de la tasa de los cupones.

1. Cuando un bono con tasa variable cotice a la par, su precio no se verá afectado por un aumento (disminución) en la tasa de interés; el efecto negativo (positivo) del mayor (menor) descuento se compensa con los mayores (menores) pagos de renta (en la medida que la tasa de los cupones sea una tasa de interés representativa de la economía donde se produce el incremento). En este caso, la TIR será la misma que la tasa vigente.

2. Cuando un bono con tasa variable que cotice debajo de la par (es decir que tiene una prima de riesgo positiva, q>0), será necesario distinguir entre variaciones en la tasa de interés libre de riesgo (Rf) y la prima de riesgo (q).

Cuando aumenta la tasa libre de riesgo, el precio tiende a subir, ya que los pagos de renta aumentan en una cierta proporción, la tasa de descuento lo hace en menor medida por tener un componente fijo dado por la prima de riesgo. Es decir que la TIR requerida por el mercado aumentará proporcionalmente menos que la tasa libre de riesgo.

La relación positiva entre la variación en la tasa libre de riesgo y el precio se mantiene aún cuando existe un spread fijo sobre dicha tasa, siempre que el spread sea menor al riesgo implícito en el descuento de los flujos (es decir, siempre y cuando el título cotice debajo de la par). La relación entre las variaciones en la tasa de interés y el precio del bono se hacen negativas en el caso en que el bono cotice por encima de la par.

En síntesis, mientras que en bonos a tasa fija la relación entre la tasa de interés y el precio es siempre negativa, en el caso de un bono a tasa flotante, será mayor, menor o igual a cero, según el bono cotice por debajo, sobre o a la par.

Por lo tanto al aplicar los conceptos de duration y convexity con los bonos a tasa flotante se debe tener extremado cuidado.

Su aplicabilidad resulta inalterada si se considera que los cambios en la TIR se deben a cambios en el riesgo país, y no a cambios en la tasa libre de riesgo. Y, dada la mayor volatilidad del riesgo país en comparación con la de la tasa de interés, este supuesto resulta razonable.

Fuentes

* Finanzas en Administración. J. Fred Weston / Thomas E. Copeland. Mc Graw Hill.
* Fundamentos de Financiación Empresarial. R.Brealey/ S.Myers. Mc Graw Hill.
* Fundamentos de Finanzas Corporativas. Ross/Westerfield/Jordan. McGraw Hill.

* Obligaciones Negociables. Bonos y Opciones. Rodolfo Apreda.
* Douglas, Levingston. Bond Risk Analysis: Guida to Duration and Convexity.
* Valuación de Bonos. Claudio Ariganello / Gustavo Tapia. Ediciones Nueva Técnica.